المحاضرة الـ...

مثال 2

ليكن لدينا الاحداثيات المنحنية اللذان يبينان نقطة ما على سطح ونفرض ان

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2M(u,v)du\,dv + G(u,v)\,dv^2 \quad (1)$$

مربع متوسط عنصر على السطح

تعرف الخطوط الجيوديزية على السطح بأنها المنحنيات المعينة بشرط اللازم من أجل نهاية صغرى للتكامل

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Mv' + Gv'^2}\, du \quad (2)$$

الذي يعطي طول المنحني حيث اعتبرنا v تابعاً لـ u على طول المنحني

المطلوب ايجاد الخطوط الجيوديزية

الحل:

لنأخذ كرة مركزها مبدأ الاحداثيات ونصف قطرها واحدة الاطوال عندئذ يكون

$u = \sin\theta\cos\varphi \qquad v = \sin\theta\sin\varphi \qquad z = \cos\theta$

من هذه العلاقات نحصل على

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dz^2$$

$$du = \cos\theta\cos\varphi\, d\theta - \sin\theta\sin\varphi\, d\varphi$$

$$dv = \cos\theta\sin\varphi\, d\theta + \sin\theta\cos\varphi\, d\varphi$$

$$dz = -\sin\theta\, d\theta$$

$$ds = d\theta + \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

بمطابقة هذه العلاقة مع (1) نجد ان

$E(u,v) = 1 \qquad M(u,v) = 0$

$G(u,v) = \sin^2\theta \qquad u = \theta \qquad v = \varphi$

ومنه فإن العلاقة (2) تكتب بالشكل

$$J = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}\, d\theta \quad (3)$$

في هذه الحالة التابع لا يحوي φ معادلة أولر تأخذ الشكل التالي

$$\frac{d}{d\theta} F_{\varphi'} = 0 \quad (4)$$

من (3)

$$F(\theta, \varphi') = \sqrt{1 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi'} = F_{\varphi'}(\theta, \varphi') = \frac{\varphi' \sin^2\theta}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \cdot \varphi'^2}}$$

نبدل في (4)

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\sin^2\theta \cdot \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \cdot \varphi'^2}}\right] = 0$$

بالمكاملة

$$\frac{\sin^2\theta \cdot \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \cdot \varphi'^2}} = C_1$$

C_1 ثابت كيفي

في حالة $C_1 = 0$ (اي $\theta = \theta_0 = 0 ,\ \theta = \theta_1 = \pi$) نحصل خصوصاً على الحل

$\varphi = const \Rightarrow \varphi' = 0$

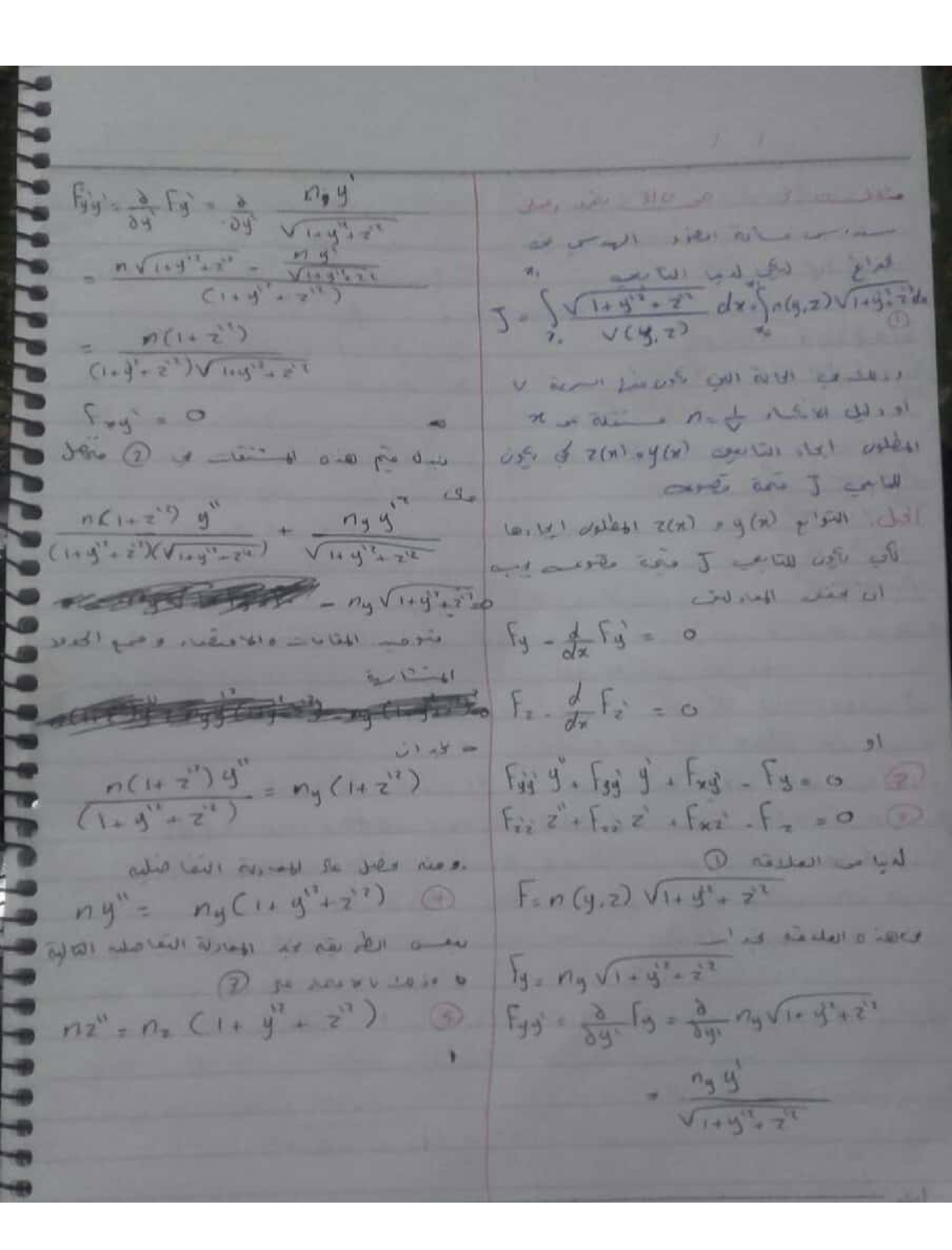
فالخطوط الجيوديزية على الكرة هي عبارة عن خطوط الطول عليها أي الدوائر العظمى المارة بقطبي الكرة ($\theta = 0 ,\ \theta = \pi$) ونظراً لأن اختيار القطب هو كيفي فإن جميع الدوائر العظمى للكرة هي وضوحاً خطوط جيوديزية

السؤال بشكل آخر

اذا كان f لا يحوي y $\quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$

اثبت ان التابع يحقق ... عندما $\theta = 0 ,\ \theta = \pi$ هي خطوط جيوديزية

0.7



مثال 3 ص 310

سنعرض مسألة الضوء الهندسي في الفراغ لدينا التابعية

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(y,z)}\,dx = \int_{x_0}^{x_1} n(y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \quad (1)$$

v دالة عن الدالة التي تمثل السرعة v أو دليل الانكسار $n = \frac{1}{v}$ مستقلة عن x

المطلوب ايجاد التابعين $y(x)$, $z(x)$ كي يكون التابعي J قيمة قصوى

الحل: التوابع $y(x)$ و $z(x)$ المطلوب ايجادها لكي يكون للتابعي J قيمة قصوى يجب أن تحقق المعادلات

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0$$

أو

$$F_{y'y'}\,y'' + F_{yy'}\,y' + F_{xy'} - F_y = 0 \quad (2)$$

$$F_{z'z'}\,z'' + F_{zz'}\,z' + F_{xz'} - F_z = 0 \quad (3)$$

لدينا من العلاقة (1)

$$F = n(y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

نعوض في العلاقة نجد أن

$$F_y = n_y\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

$$F_{yy'} = \frac{\partial}{\partial y'}F_y = \frac{\partial}{\partial y'}n_y\sqrt{1+y'^2+z'^2} = \frac{n_y\,y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$F_{y'y'} = \frac{\partial}{\partial y'}F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\frac{n\,y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$= \frac{n\sqrt{1+y'^2+z'^2} - \frac{n\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}}{(1+y'^2+z'^2)}$$

$$= \frac{n(1+z'^2)}{(1+y'^2+z'^2)\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

$$F_{xy'} = 0$$

نبدل قيم هذه المشتقات في (2) فنحصل على

$$\frac{n(1+z'^2)\,y''}{(1+y'^2+z'^2)(\sqrt{1+y'^2+z'^2})} + \frac{n_y\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}$$

[illegible] $- n_y\sqrt{1+y'^2+z'^2} = 0$

نتوحد المقامات ونختصر ونجمع الحدود المتشابهة

[illegible]

لدينا

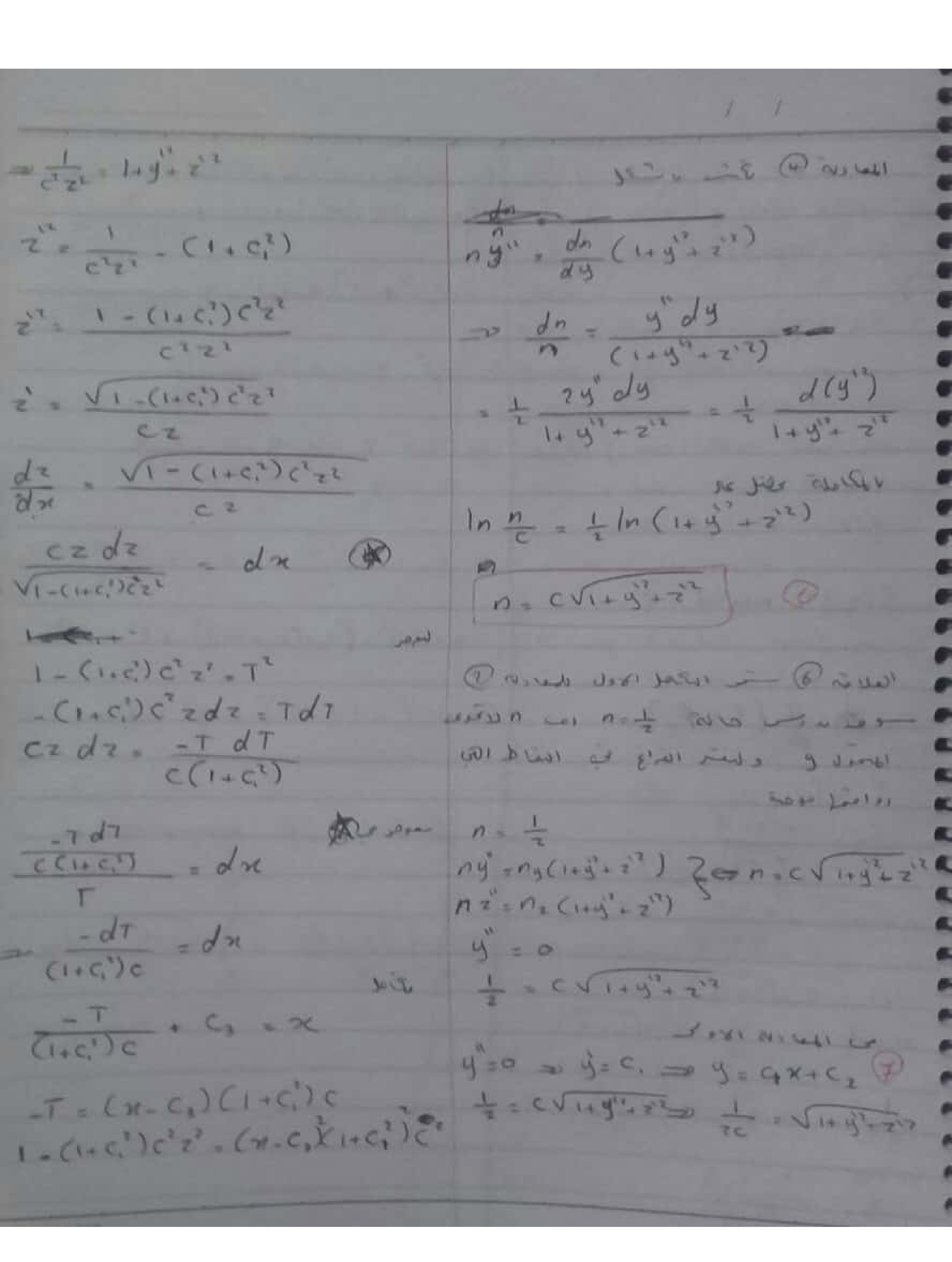
$$\frac{n(1+z'^2)\,y''}{(1+y'^2+z'^2)} = n_y(1+z'^2)$$

ومنه نحصل على المعادلة التفاضلية

$$n\,y'' = n_y(1+y'^2+z'^2) \quad (4)$$

بنفس الطريقة نجد المعادلة التفاضلية التالية من (3)

$$n\,z'' = n_z(1+y'^2+z'^2) \quad (5)$$



المعادلة ④ تقسم على n

$$n y'' = \frac{dn}{dy}(1+y'^2+z'^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{y''\,dy}{(1+y'^2+z'^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2y''\,dy}{1+y'^2+z'^2} = \frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{1+y'^2+z'^2}$$

بالتكامل نحصل على

$$\ln\frac{n}{c} = \frac{1}{2}\ln(1+y'^2+z'^2)$$

$$\boxed{n = c\sqrt{1+y'^2+z'^2}} \quad ⑥$$

العلاقة ⑥ تمثل التكامل الاول للمعادلة ⑦ وهي تمثل حالة $n=\frac{1}{2}$ اي n تساوي المعامل g والمسار المراع في الفضاء الذي ... موجة

$$n = \frac{1}{2}$$

$$n y'' = n_y(1+y'^2+z'^2),\quad n z'' = n_z(1+y'^2+z'^2) \Leftarrow n = c\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

$$y'' = 0$$

$$\frac{1}{2} = c\sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

من المعادلة ...

$$y'' = 0 \Rightarrow y' = c_1 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 \quad ⑦$$

$$\frac{1}{2} = c\sqrt{1+y'^2+z'^2} \Rightarrow \frac{1}{2c} = \sqrt{1+y'^2+z'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2 z^2} = 1+y'^2+z'^2$$

$$z'^2 = \frac{1}{c^2 z^2} - (1+c_1^2)$$

$$z'^2 = \frac{1-(1+c_1^2)c^2z^2}{c^2z^2}$$

$$z' = \frac{\sqrt{1-(1+c_1^2)c^2z^2}}{cz}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-(1+c_1^2)c^2z^2}}{cz}$$

$$\frac{cz\,dz}{\sqrt{1-(1+c_1^2)c^2z^2}} = dx \quad (*)$$

نفرض

$$1-(1+c_1^2)c^2z^2 = T^2$$

$$-(1+c_1^2)c^2 z\,dz = T\,dT$$

$$cz\,dz = \frac{-T\,dT}{c(1+c_1^2)}$$

نعوض في (*)

$$\frac{\frac{-T\,dT}{c(1+c_1^2)}}{T} = dx$$

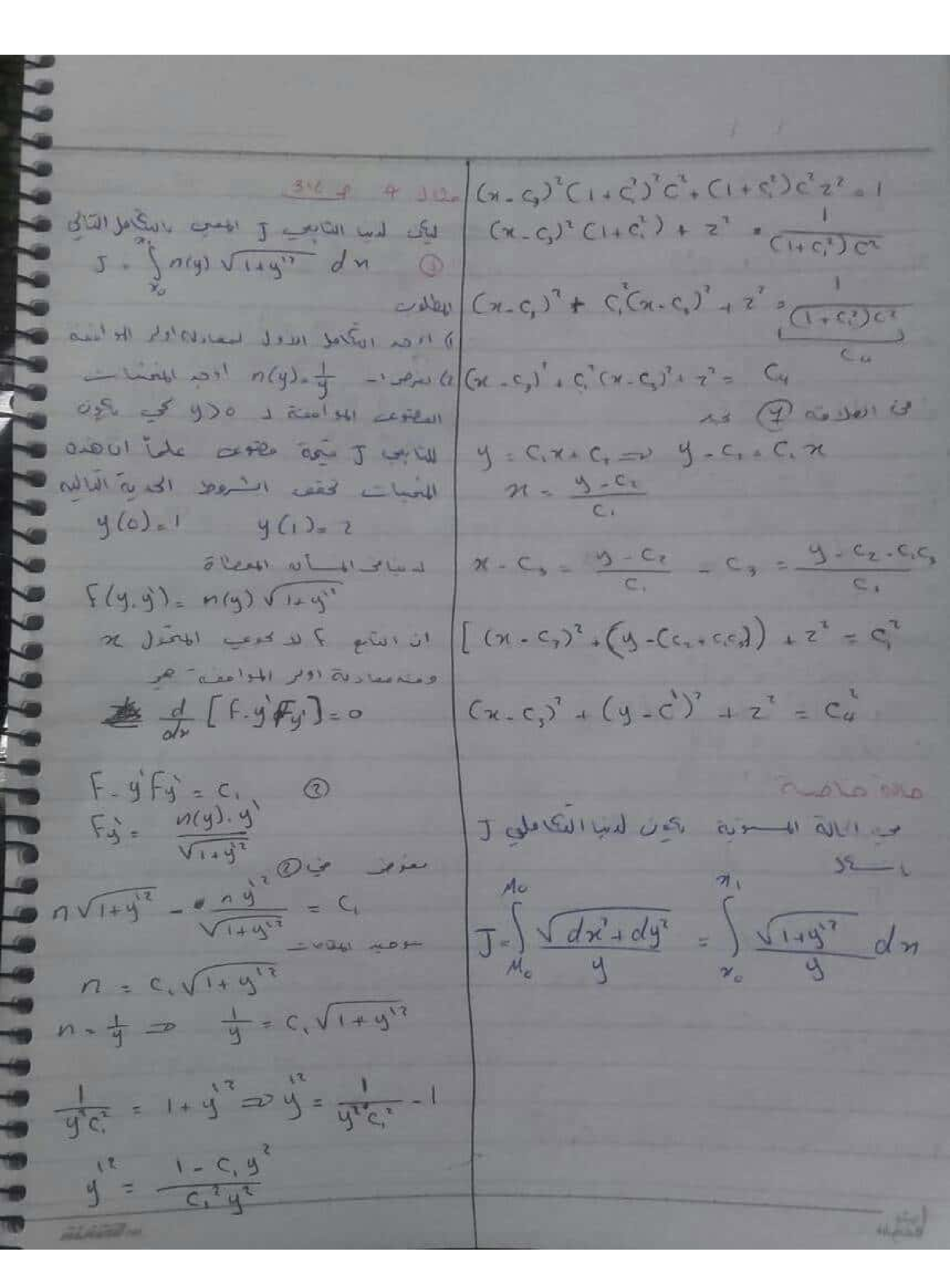
$$\Rightarrow \frac{-dT}{(1+c_1^2)c} = dx$$

نكامل

$$\frac{-T}{(1+c_1^2)c} + c_3 = x$$

$$-T = (x-c_3)(1+c_1^2)c$$

$$1-(1+c_1^2)c^2z^2 = (x-c_3)^2(1+c_1^2)^2c^2$$



$$(x-c_3)^2(1+c_1^2)^2c^2+(1+c_1^2)c^2z^2=1$$

$$(x-c_3)^2(1+c_1^2)+z^2=\frac{1}{(1+c_1^2)c^2}$$

$$(x-c_3)^2+c_1^2(x-c_3)^2+z^2=\underbrace{\frac{1}{(1+c_1^2)c^2}}_{c_4}$$

$$(x-c_3)^2+c_1^2(x-c_3)^2+z^2=c_4$$

في العلاقة ⑦ نجد

$$y=c_1x+c_2 \Rightarrow y-c_2=c_1x$$

$$x=\frac{y-c_2}{c_1}$$

$$x-c_3=\frac{y-c_2}{c_1}-c_3=\frac{y-c_2-c_1c_3}{c_1}$$

$$\left[(x-c_3)^2+\left(y-(c_2+c_1c_3)\right)+z^2=c_1^2\right.$$

$$(x-c_3)^2+(y-c')^2+z^2=c_4^2$$

ملاحظة

في الحالة المستوية يكون لدينا التكامل J بالشكل

$$J=\int_{M_0}^{M_0}\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$$

مثال 4 ص 342

ليكن لدينا التابعي J المعطى بالتكامل التالي

$$J=\int_{x_0}^{x_1}n(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad ①$$

المطلوب

1) اوجد التكامل الاول لمعادلة اولر الموافقة

2) نفرض: $n(y)=\frac{1}{y}$ اوجد المنحنيات المتطرفة الموافقة لـ $y>0$ حتى يكون للتابعي J قيمة متطرفة علماً ان هذه المنحنيات تحقق الشروط الحدية التالية

$$y(0)=1 \qquad y(1)=2$$

لدينا في المسألة المعطاة

$$f(y,y')=n(y)\sqrt{1+y'^2}$$

ان التابع f لا يحوي المتحول x ومنه معادلة اولر الموافقة هي

$$\frac{d}{dx}\left[f-y'f_{y'}\right]=0$$

$$f-y'f_{y'}=c_1 \quad ②$$

$$f_{y'}=\frac{n(y)\cdot y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

نعوض في ②

$$n\sqrt{1+y'^2}-\frac{ny'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

توحيد المقامات

$$n=c_1\sqrt{1+y'^2}$$

$$n=\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y}=c_1\sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{1}{y^2c_1^2}=1+y'^2 \Rightarrow y'^2=\frac{1}{y^2c_1^2}-1$$

$$y'^2=\frac{1-c_1y^2}{c_1^2y^2}$$

وهو عبارة عن نصف دائرة مركزها (2,0)
تقع على المحور ox ونصف قطرها $\sqrt{5}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - c_1^2 y^2}}{c_1 y}$$

$$\frac{c_1 y \, dy}{\sqrt{1 - c_1^2 y^2}} = dx \quad (3)$$

$$1 - c_1^2 y^2 = T^2 \Rightarrow -c_1^2 y \, dy = T dT$$

$$c_1 y \, dy = \frac{-T dT}{c_1}$$

نعوض في (3)

$$\Rightarrow \frac{\frac{-T dT}{c_1}}{T} = dx$$

$$\frac{-dT}{c_1} = dx$$

نكامل

$$\frac{-T}{c_1} = x + c_2 \Rightarrow$$

$$T^2 = c_1^2 (x + c_2)^2$$

$$1 - c_1^2 y^2 = c_1^2 (x + c_2)^2$$

$$c_1^2 (x + c_1)^2 + c_1^2 y^2 = 1$$

$$(x + c_2)^2 + y^2 = \frac{1}{c_1^2}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_2^2 + 1 = \frac{1}{c_1^2}$$

$$y(1) = 2 \Rightarrow (1 + c_2)^2 + 4 = \frac{1}{c_1^2}$$

$$c_2^2 + 1 = (1 + c_2)^2 + 4$$

$$\Rightarrow c_2^2 + 1 = 1 + 2c_2 + c_2^2 + 4$$

$$2c_2 = -4 \Rightarrow c_2 = -2$$

$$\frac{1}{c_1^2} = 5$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 5$$